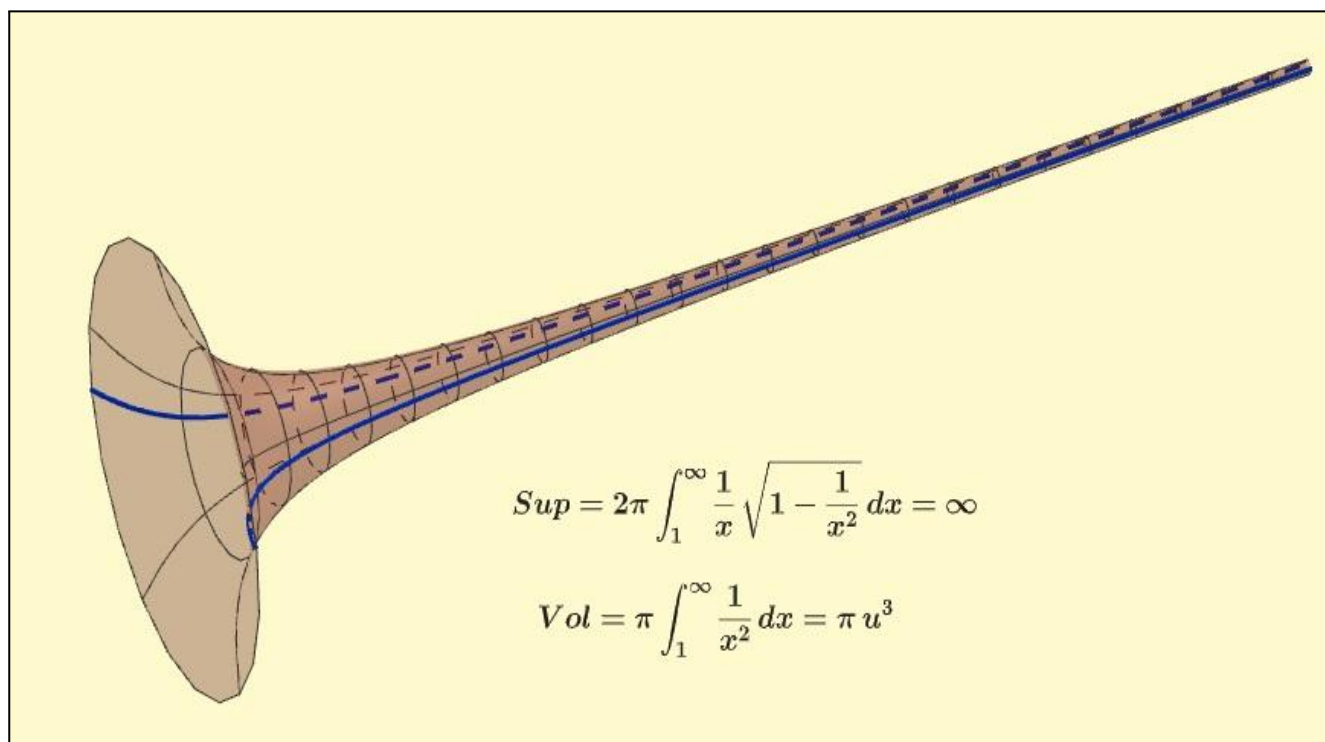


LA TROMPETA DE TORRICELLI DIMENSIONES

Claudio Martínez Gil

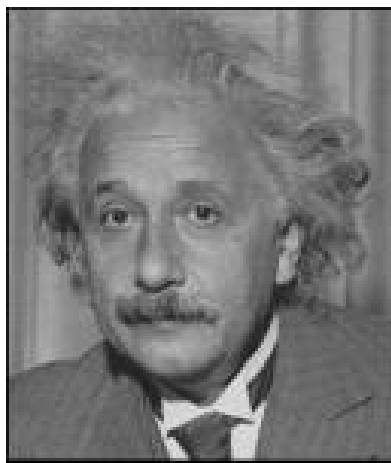


Actividad 0: Estos dos saben

a) *"El día que usted no se haya reído, es un día perdido"*



b) *"No se preocupen por sus problemas con las Matemáticas. Los míos son todavía mayores."*



Actividad 1: Pequeña biografía de Torricelli

El 15 de octubre de 1608, nació **Evangelista Torricelli**, en la ciudad de Faenza, Italia. Fue uno de esos científicos renacentistas capaz de abarcar amplias ramas del saber, si bien es conocido sobre todo como físico. Evangelista era el primer hijo de los tres que tuvo el matrimonio formado por Gaspare Torricelli, obrero textil, y Caterina Angetti, mujer de escasos recursos económicos.

En 1624, empezó a estudiar **Matemáticas y Filosofía** durante dos años. Posteriormente, fallecido su padre, fue enviado a Roma, a finales de 1626, para estudiar con el fraile Benedictino Benedetto Castelli.

Torricelli se convirtió en secretario particular de Castelli. Pero grandes debieron ser sus progresos, ya que más tarde fue encargado por el propio Castelli para sustituirlo en sus clases, cuando este debía ausentarse de Roma. En una de esas ausencias, **Galileo** escribió una carta a Castelli, que, al encontrarse fuera de Roma, contestó Torricelli. Pero, gran admirador de Galileo, deseoso de establecer un contacto científico con él, aprovechó la oportunidad para informarle de sus propios trabajos matemáticos.

Vivió con Galileo, ejerciendo de amanuense del genio que ya entonces llevaba cinco años dominado por una ceguera total. Apenas tres meses disfrutó Torricelli del contacto con Galileo, pues el 8 de enero del siguiente año de 1642, moría Galileo.

En 1643, descubrió Torricelli el **principio del barómetro**, que demostraba la existencia de la **presión atmosférica**, y por el que principalmente es recordado en la actualidad. Más tarde, Pascal confirmaría este principio. El contexto de la época estaba dominado por el **estudio de las curvas**: su representación, su longitud, su área, máximos y mínimos, volumen acotado por la rotación de superficies.

El **cálculo integral** en Torricelli aborda los problemas de cuadraturas y curvaturas con sumo cuidado. Emplea el **método de los indivisibles**, pero no resuelve todas las dificultades que este método lleva consigo.

En su trabajo ***De dimensione parabolae***, Torricelli lleva a cabo veintiuna demostraciones de la cuadratura de la parábola. En 1641 demuestra que la rotación de curvas de longitud infinita puede producir sólidos de volumen finito. Para ello, hace **girar una rama de hipérbola equilátera alrededor de una asíntota**, que ha tomado como eje, y la corta, en un punto genérico de la curva, por un plano perpendicular al eje de giro.

Actividad 2: Contexto religioso

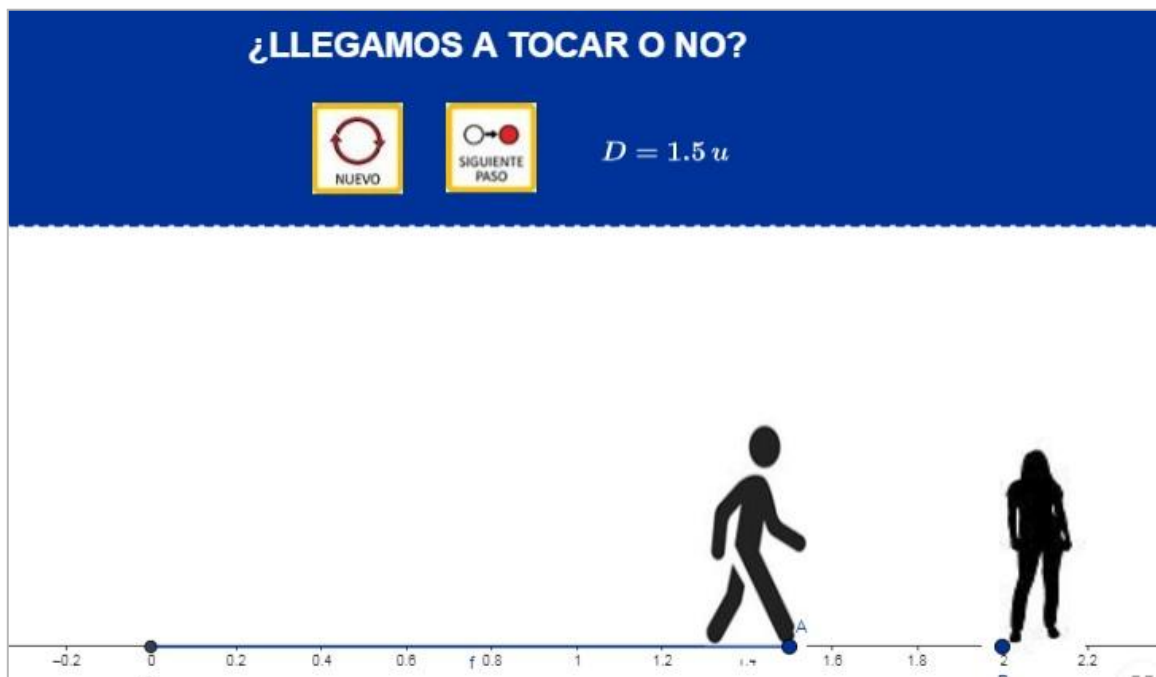
El nombre "**cuerno de Gabriel**" se debe a la asociación con la tradición cristiana donde el arcángel Gabriel toca un cuerno para anunciar el Día del Juicio Final. Esta figura geométrica, también conocida como trompeta de Torricelli, posee una superficie infinita pero un volumen finito, lo que se relaciona con la idea de lo divino (infinito) asociado con lo terrenal (finito).

- La figura geométrica, matemáticamente definida por la **rotación de la función $f(x) = 1/x$** , evoca la imagen de un cuerno o trompeta.
- En la tradición cristiana, Gabriel es el **arcángel que toca la trompeta** para anunciar el fin del mundo, de ahí la conexión con el nombre.
- Esta relación entre la figura geométrica y la figura religiosa transmite la idea de **algo infinito** (la superficie) conectado a **algo finito** (el volumen), lo cual se interpreta como una representación de **lo divino y lo terrenal**.



Actividad 3: El infinito

Cada vez recorremos la mitad de la distancia. ¿Llegamos? La suma de todas estas mitades progresivas ($1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$) dará como resultado la distancia completa que se debía cubrir, en lugar de un valor infinito.



Ejercicio 1: Suma con tu calculadora los números anteriores. ¿Cuántos sumandos has de utilizar en tu calculadora para que dé 2?

Utilizamos el applet: <https://www.geogebra.org/m/frngtswx> y simulamos con GeoGebra.

Modelización

El conjunto de los números reales extendidos consta de todos los números reales más dos elementos: El infinito y el -infinito.

Números Reales ($\mathbb{R}$): Este conjunto incluye todos los números que pueden ser representados en una recta numérica, como enteros, fracciones, números decimales, y números irracionales (como $\sqrt{2}$ o π).

Infinito Positivo ($+\infty$): Representa un valor mayor que cualquier número real. Se utiliza para indicar que una cantidad crece indefinidamente hacia valores cada vez mayores.

Infinito Negativo ($-\infty$): Representa un valor menor que cualquier número real. Se utiliza para indicar que una cantidad decrece indefinidamente hacia valores cada vez menores.

Orden: El conjunto $\mathbb{R}$ extendido está totalmente ordenado, con la relación $-\infty \leq a \leq +\infty$ para todo a en $\mathbb{R}$.

Topología: Se puede definir una topología en $\mathbb{R}$ extendido que permite hablar de vecindades de $+\infty$ y $-\infty$, lo cual es útil para definir límites en el infinito.

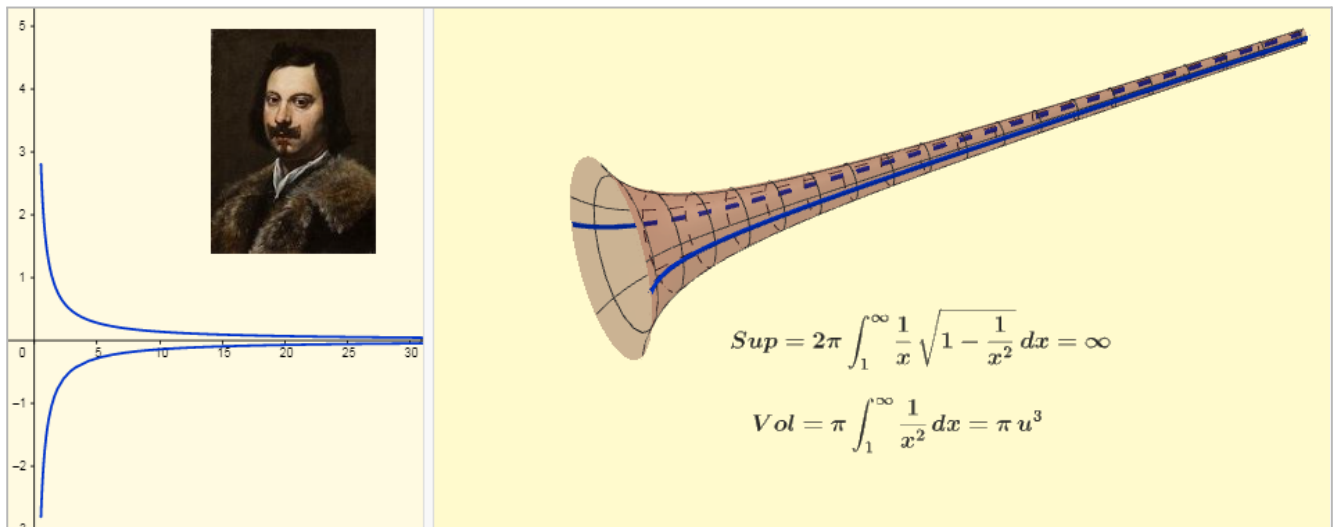
Cálculo: El conjunto $\mathbb{R}$ extendido se utiliza para estudiar límites de funciones que tienden a infinito, tanto positivo como negativo.

Geometría: Se puede utilizar para representar la recta numérica completa, incluyendo los puntos en el infinito.

Actividad 4: ¿Qué es la trompeta de Torricelli?

La Trompeta de Torricelli se genera al girar la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ (para $x \geq 1$) alrededor del eje X. Se ve de forma dinámica en: <https://www.geogebra.org/m/tjez2kkq>

Ejercicio 2: Busca en Internet (o en alguna IA): ¿Qué es una integral? ¿Y una integral impropia?



Actividad 5: La paradoja

La paradoja surge al considerar la pintura de este objeto: aunque el **volumen finito** sugiere que se puede llenar con una **cantidad finita de pintura**, el **área infinita** de su superficie implicaría la necesidad de una **cantidad infinita de pintura** para cubrirla.

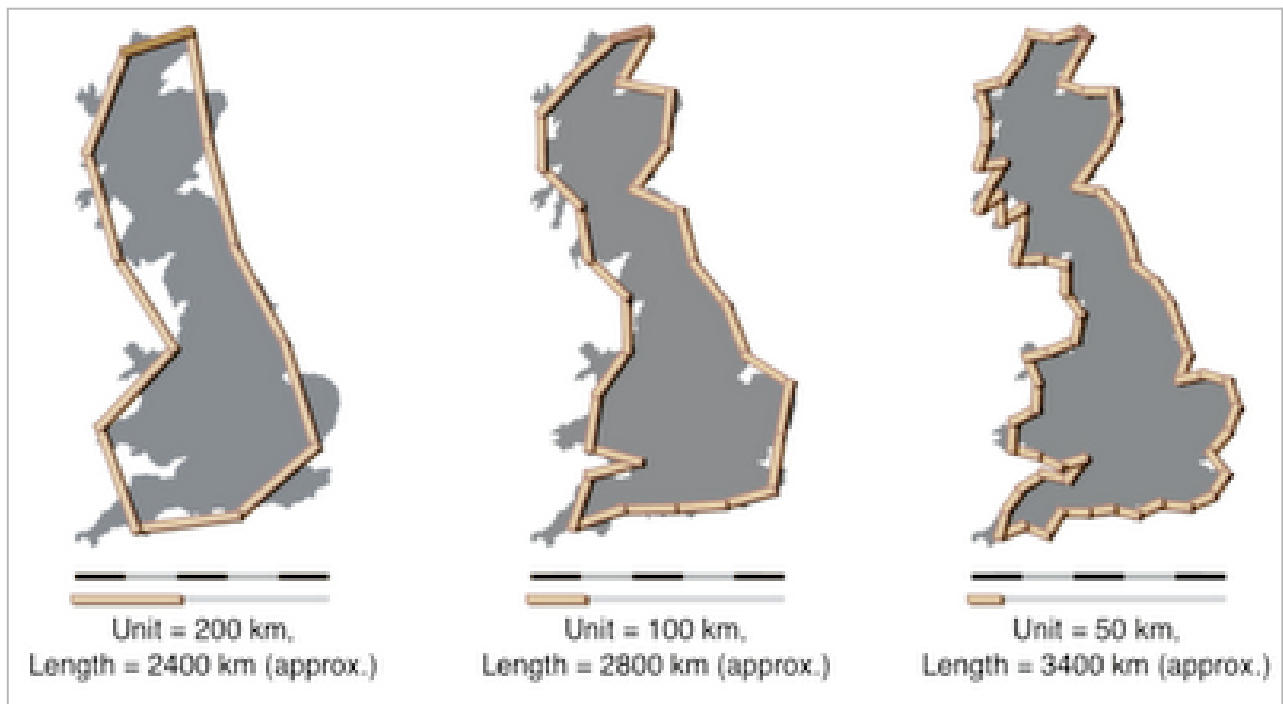
Se puede **rellenar el embudo** con una cantidad finita de pintura (pintando la superficie interna), **pero nunca se podría pintar toda su superficie interna** con la misma cantidad de pintura.

La paradoja surge de una **idealización matemática**. En la realidad, una trompeta no puede ser **infinitamente larga ni infinitamente estrecha**. El tamaño de una molécula de pintura impediría que la pintura cubriera todas las partes internas de la trompeta.

La Relación Superficie-Volumen: Siempre hay que poner una cierta capa de pintura, con lo que repartimos volumen. Imposible que con ese volumen finito pintemos la trompeta. Tenemos también un problema de dimensiones.

Actividad 6: Observación

a) **B. Mandelbrot (1967):** "How long is the British coastline?"



b) Coliflor - brócoli



c) Pavo real



d) Ramas de árbol



Actividad 7: Dimensiones no enteras: Los fractales

Benoit Mandelbrot: Es el principal exponente de la Géométrie Fractale. Muestra como los fractales aparecen en múltiples campos, tanto en Matemáticas, como, sobre todo, en la Naturaleza.



Fractal viene del latín **fractus**, que significa **frappé** o fracturado.

¿Qué son los fractales?

- Estructura que **se repite en escalas cada vez más pequeñas**.
- Es **demasiado irregular** para ser descrito por la Géométrie Euclidienne.
- Estructura geométrica **dividida en varias partes**, en la que cada una es (approximativement) **una copia reducida del total**.
- Los fractales se forman por **iteración**: La definición es recursiva.

Actividad 8: Dimensiones no enteras: Dimensión fractal

Tenemos un objeto para el que necesitamos ensamblar **N copias** para construir una versión más grande con un **factor de escala S** .

La dimensión fractal del objeto se define como el número real positivo d , que cumple:

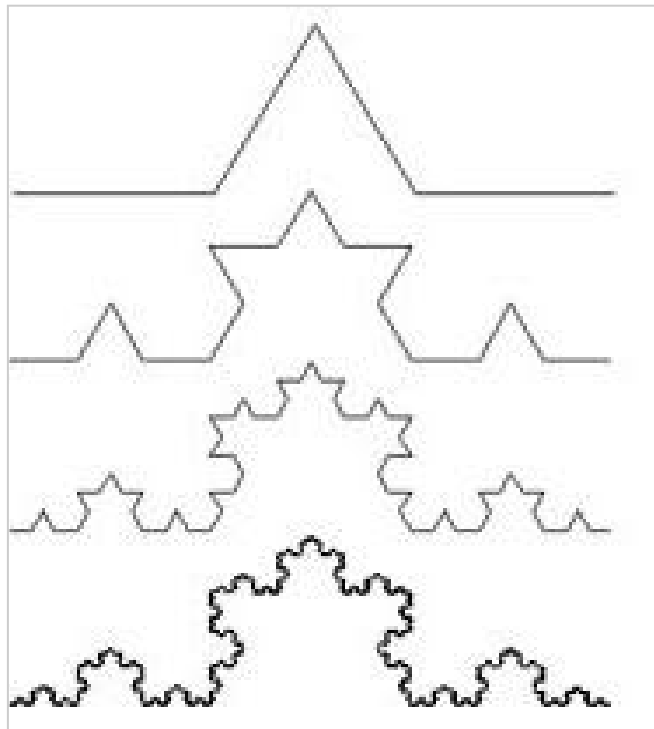
$$S^d = N$$

Ejemplo 1: Fractal de Koch

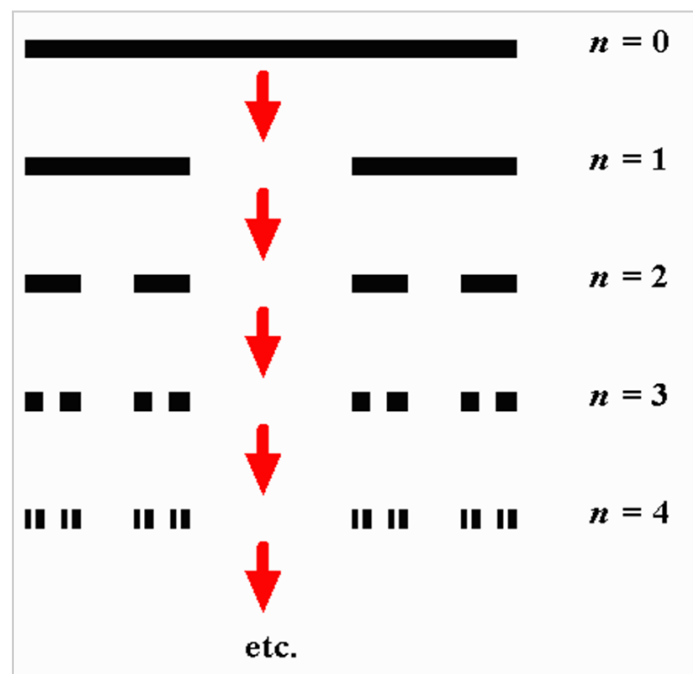
¿Cuántas copias de la curva original son necesarias para construir una versión más grande? Answer: **4**.

¿Cuánto debe aumentar la escala de la curva de Koch original para tener una versión más grande? Answer: **3**

Así: **$3^d = 4$** , entonces, $d = \log(4)/\log(3) \approx 1.26185 \dots$



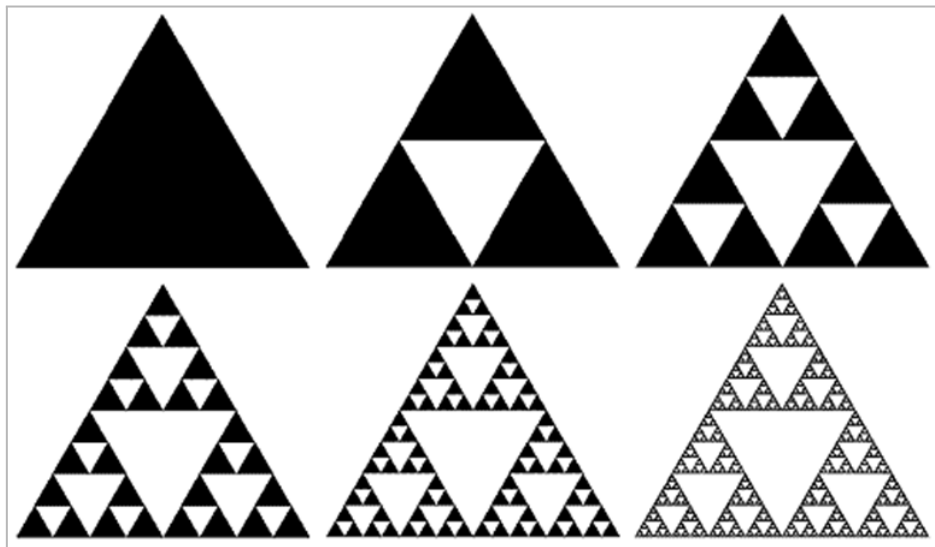
Ejemplo 2: Conjunto de Cantor



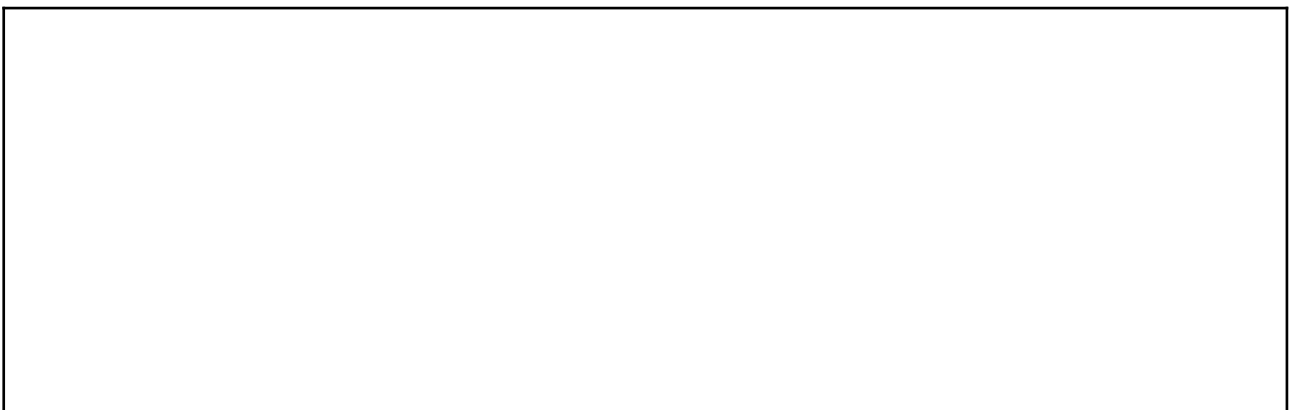
Ejercicio 3: Calcula la dimensión fractal del Conjunto de Cantor



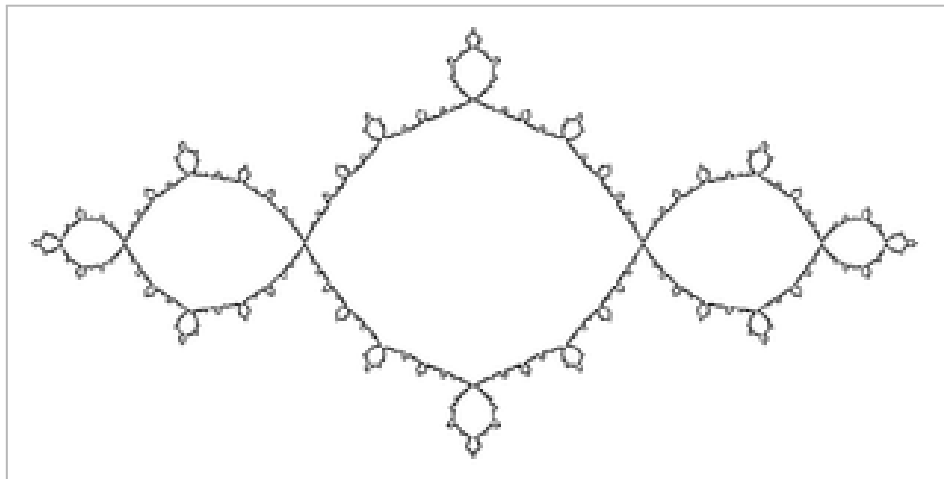
Ejemplo 3: Triángulo de Sierpinski



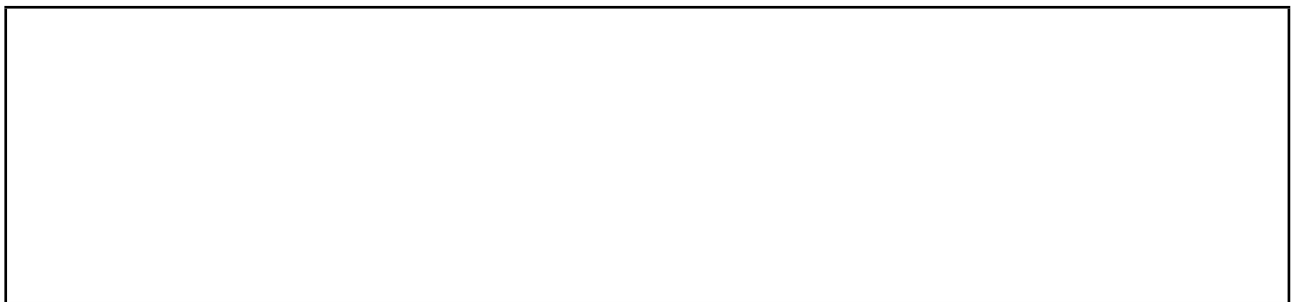
Ejercicio 4: Halla la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski



Ejemplo 4: Atractor de Julia



Ejercicio 5: Halla la dimensión fractal del atractor de Julia



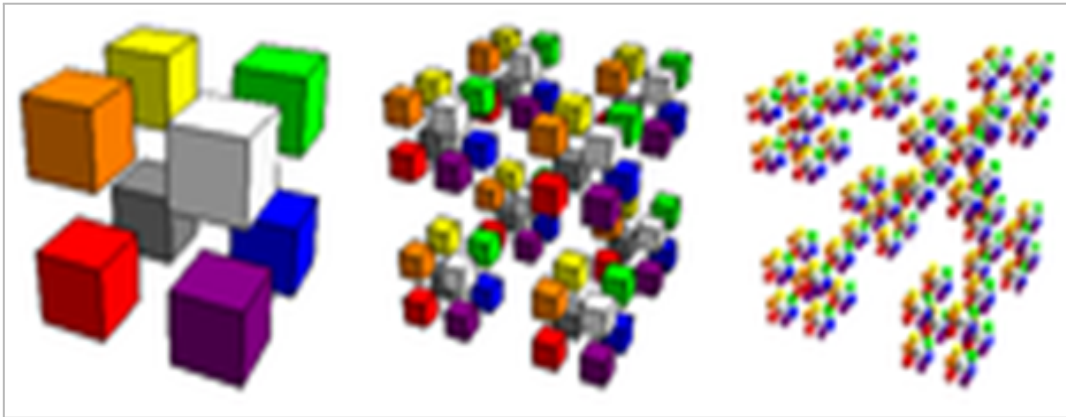
Otras dimensiones:



British coastline: 1.25



Cauliflower: 2.33



3D Cantor set: 1.89



Surface of brain: 2.79

Actividad 9: "Matemáticas en la piel"





Actividad 10: Software to calculate fractal dimension

Fractalyse	Image JS	Wolfram alpha
----------------------------	--------------------------	-------------------------------

ALGUNOS VIDEOS

1. Sáez de Cabezón: <https://youtu.be/Q4RLtRlz-4A?si=d8Wj5pahN-N5iuYO>
2. <https://youtu.be/0Re12vq4z2g?si=9ul5GMw8ExOqfJGL>
3. UNED: <https://youtu.be/SHo6AmaDvo4?si=INfPI94-RzX3JL3c>
4. La curva de Koch: https://youtu.be/eKY_1j9VrEA?si=UouCvKxnH9busRDh

BIBLIOGRAFÍA

1. Burger, E.B. and Starbird, M. (2005): *The Heart of Mathematics: An Invitation to Effective Thinking*, J. Wiley
2. Mandelbrot, B.B. (1982): *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co., 1982
3. Frame, M., Urry, A (2017): *Fractal worlds*. Yale University Press
4. Webpage of Gabriel's horns: https://en.wikipedia.org/wiki/Gabriel%27s_horn
5. Webpage of Fractals: <http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>
6. Manuel Sada en Geogebra: Fractales: <https://www.geogebra.org/m/tUD6vpFr>